第 19 講　微分法・積分法

1　k は定数とし，方程式 $2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$ について考える．この方程式が異なる 3 個の実数解をもつとき，k の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数

→ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解の個数は，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と x 軸の共有点の個数.

よって $y=f(x)$ のグラフを描くために微分が必要.「　　　　　　」がカギを握る.

また,「　　　　　」が有効な手段となる場合もある.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

[2]　$f(t)$ を t の 2 次関数とし，$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$ とする．$y=g(x)$ は，$x=1$ と $x=2$ で極値をとり，$x=\dfrac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\dfrac{3}{2}$ であるとする．このとき，$y=g(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　**定積分関数その１**

$\int_{a}^{b}f(t)dt$ は「　　　　」 ⇒ 「　　　　　　」が有効　　※$\int_{a}^{b}xf(t)dt=$

[2]　**定積分関数その２**

$\int_{a}^{x}f(t)dt=F(x)-F(a)$　より　　　　　　$\int_{a}^{x}f(t)dt=$

また，$x=a$ のとき　$\int_{a}^{a}f(t)dt=$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2曲線 $C_1 : y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，$C_2 : y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ の両方に接する直線を l とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

【Point Pickup】

∫の公式その②

$$\int (x-\alpha)^2 dx = \qquad\qquad +C$$

主に放物線と「　　　」，放物線と放物線が「　　　　」ときの面積がらみに用いる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　微分法・積分法

［1］ a を実数とするとき，直線 l：$y=3x-a$ と曲線 C：$y=2x^3-3x$ の共有点の個数が 3個となる a の範囲は　$-$ ア $< a <$ イ である．

［2］ $f(x)=\int_{-2}^{2} xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=$ ウ $x+$ エ である．

［3］ 直線 l は，傾きが正で，2つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=4x^2+12x$ に接している．

(1) 直線 l の方程式は　$y=$ オ $x-$ カ である．

(2) 放物線 C_1，C_2，および直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　微分法・積分法

1　k は定数とし，方程式 $2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$ について考える．この方程式が異なる 3 個の実数解をもつとき，k の値の範囲を求めよ．

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+k^2+7k$ とおくと　$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f(x)$ の増減表は右図．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値　$f(1)=k^2+7k+5$　　極小値　$f(2)=k^2+7k+4$

よって，$f(x)=0$ が 3 個の異なる実数解をもつのは

$f(1)>0$　かつ　$f(2)<0$

つまり　$k^2+7k+5>0$　かつ　$k^2+7k+4<0$ のとき．

$k<\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}$，$\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}<k$　かつ　$\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}<k<\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}$ より

求める k の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}<k<\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}<k<\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2}}$

(別解)

$2x^3-9x^2+12x+k^2+7k=0$　より　$2x^3-9x^2+12x=-k^2-7k$　……①

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$ とおくと　$f'(x)=6x^2+18x-12=6(x-1)(x-2)$

$f(x)$ の増減表は右図．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	4	↗

よって①が異なる 3 個の実数解をもつのは　$4<-k^2-7k<5$

つまり　$k^2+7k+4<0$　かつ　$k^2+7k+5>0$ のとき．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] ［1］ $f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$f(x)=3x^2+\int_{-1}^{0}xf(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt=3x^2+x\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{-1}^{0}f(t)dt=b$, $\int_{0}^{1}f(t)dt=c$ とおくと　$f(x)=3x^2+bx+c$

このとき　$b=\int_{-1}^{0}(3t^2+bt+c)dt=\left[t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_{-1}^{0}=0-\left(-1+\frac{b}{2}-c\right)=1-\frac{b}{2}+c$

よって　$3b-2c=2$　……①

$c=\int_{0}^{1}(3t^2+bt+c)dt=\left[t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_{0}^{1}=1+\frac{b}{2}+c$

よって　$1+\frac{b}{2}=0$　より　$b=-2$

このとき　①より　$c=-4$　　したがって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-2x-4}$

[2] ［2］ $f(t)$ を t の 2 次関数とし，$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$ とする．$y=g(x)$ は，$x=1$ と $x=2$ で極値をとり，$x=\frac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ であるとする．このとき，$y=g(x)$ の極大値と極小値を求めよ.

$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$　より　$g'(x)=1+f(x)$

$f(x)$ は 2 次関数より $g'(x)$ も 2 次関数.

さらに $g(x)$ は $x=1$, 2 で極値をとるので，$g'(x)=a(x-1)(x-2)$ とおける.

$x=\frac{3}{2}$ での $y=g(x)$ の接線の傾きが $\frac{3}{2}$ より　$g'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

よって　$a\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)=\frac{3}{2}$　　$a=-6$

したがって　$g'(x)=-6(x-1)(x-2)=-6x^2+18x-12$

$g(x)=-2x^3+9x^2-12x+C$（C は積分定数）

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

ここで　$g(x)=x+\int_{0}^{x}f(t)dt$　より　$g(0)=0+\int_{0}^{0}f(t)dt=0$　より

$g(x)=-2x^3+9x^2-12x$

ゆえに　$y=g(x)$ は　**極大値**　$\boldsymbol{g(2)=-4}$　　**極小値**　$\boldsymbol{g(1)=-5}$　をとる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2曲線 $C_1:y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，$C_2:y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ の両方に接する直線を l とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$C_1:y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=x^2-x-\frac{1}{4}$ より　$y'=2x-1$

C_1 上の点 $\left(s,\ s^2-s-\frac{1}{4}\right)$ における接線は

$$y=(2s-1)(x-s)+s^2-s-\frac{1}{4}=(2s-1)x-s^2-\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

$C_2:y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}=x^2-5x+\frac{15}{4}$ より　$y'=2x-5$

C_2 上の点 $\left(t,\ t^2-5t+\frac{15}{4}\right)$ における接線は

$$y=(2t-5)(x-t)+t^2-5t+\frac{15}{4}=(2t-5)x-t^2+\frac{15}{4}\quad\cdots\cdots②$$

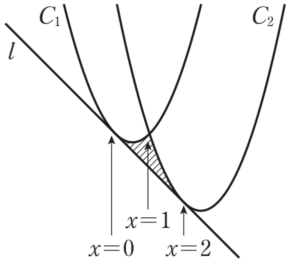
①，②が一致するとき

$$\begin{cases}2s-1=2t-5\\ -s^2-\frac{1}{4}=-t^2+\frac{15}{4}\end{cases}\qquad \begin{cases}s-t=-2\\ s^2-t^2=-4\end{cases}\qquad \begin{cases}s-t=-2\\ s+t=2\end{cases}\qquad s=0,\ t=2$$

よって求める直線は　$l:\boldsymbol{y=-x-\frac{1}{4}}$

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2-x-\frac{1}{4}=x^2-5x+\frac{15}{4}$　より　$x=1$

2曲線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積は



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&\quad+\int_1^2\left\{\left(x^2-5x+\frac{15}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\&=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx\\&=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　微分法・積分法

[1]　a を実数とするとき，直線 l：$y=3x-a$ と曲線 C：$y=2x^3-3x$ の共有点の個数が3個となる a の範囲は　$-$ ア $<a<$ イ である．

[2]　$f(x)=\int_{-2}^{2}xf(t)dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=$ ウ $x+$ エ である．

[3]　直線 l は，傾きが正で，2つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=4x^2+12x$ に接している．

(1)　直線 l の方程式は　$y=$ オ $x-$ カ である．

(2)　放物線 C_1，C_2，および直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

[1]　C と l の共有点の x 座標は　$3x-a=2x^3-3x$　つまり　$a=-2x^3+6x$ の解である．

$f(x)=-2x^3+6x$ とすると　$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減は右図．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	4	↘

直線 l と曲線 C の共有点の個数が3個になるのは，

$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数が3個のときで

$\mathbf{-4<a<4}$ である．

[2]　$f(x)=\int_{-2}^{2}xf(t)dt+1=x\int_{-2}^{2}f(t)dt+1$　　$\int_{-2}^{2}f(t)dt=a$ とおくと，$f(x)=ax+1$

このとき　$a=\int_{-2}^{2}(at+1)dt=\left[\frac{1}{2}at^2+t\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}a(4-4)+(2+2)=4$　より　$a=4$

よって　$f(x)=\mathbf{4x+1}$

[3]　(1)　C_1 上の点 $(s,\ s^2)$ における接線は　$y=2s(x-s)+s^2=2sx-s^2$

C_2 上の点 $(t,\ 4t^2+12t)$ における接線は　$y=(8t+12)(x-t)+4t^2+12t$

$=(8t+12)x-4t^2$

この2直線の式が一致するとき　$\begin{cases}2s=8t+12\\-s^2=-4t^2\end{cases}$　　$\begin{cases}s=4t+6\\s^2=4t^2\end{cases}$

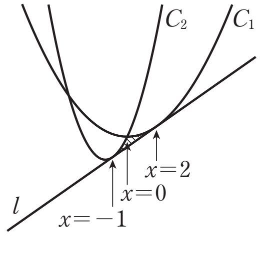
$(4t+6)^2=4t^2$　　$(t+1)(t+3)=0$　　$t=-1,\ -3$

求める直線の傾きは正より　$8t+12>0$　よって　$t=-1$　このとき　$s=2$

したがって，求める直線の方程式は　$y=\mathbf{4x-4}$

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2=4x^2+12x$　より　$x(x+4)=0$　　$x=0,\ -4$

よって求める図形の面積は右図より



$\int_{-1}^{0}\{(4x^2+12x)-(4x-4)\}dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(4x-4)\}dx$

$=4\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$

$=4\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\mathbf{4}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。